实时二维水浪模拟的当前技术水平要求开发人员在基于有效傅里叶的方法（该方法缺乏与移动障碍物的相互作用）与有限差分法或有限元方法（这些方法可处理环境相互作用，效果显着，但是更昂贵）之间进行选择。本文试图通过提出一种新的波浪模拟方法来平衡这种复杂性和性能之间的差距，该方法可以实时地模拟与移动障碍物的波浪相互作用，同时保留微小的细节并容纳非常大的模拟域。

先前用于模拟2D水波的方法直接计算水面高度的变化，该策略根据CFL条件（快速移动的波需要较小的时间步长）和Nyquist的限制（小波的细节需要紧密间隔的模拟变量）施加限制）。本文提出了一种新颖的小波变换，它根据在空间，频率和方向上变化的振幅函数来离散化液体运动，有效地概括了基于傅立叶的方法来处理局部相互作用。因为这些新变量在空间上的变化比原始水高函数要慢得多，所以我们对变量的更改极大地减少了CFL条件和奈奎斯特极限的限制，从而使我们能够以非常大的视觉分辨率模拟高度详细的水波。我们的离散化适合快速求和且易于并行化。我们还介绍了一些类似预计算波路径和双向固体流体耦合的基本扩展。最后，我们认为离散化为艺术操作提供了一组方便的变量，我们用新颖的波浪绘画界面对此进行了说明。

1 介绍

本文涉及大规模的水面波的有效且物理上合理的动画和艺术方向。 当前针对该问题的解决方案调用了偏微分方程（如浅水方程或色散波方程）的数值解，或基于傅立叶变换的解析解。 数值解决方案擅长处理与移动障碍物之间的水相互作用，但是当缩放到具有小（高频）波细节的非常大的模拟域时，它们的计算成本很高。 相反，傅立叶求和技术擅长于模拟具有高频细节的超大型区域，但它们无法轻松地纳入复杂的环境相互作用，例如移动边界和空间变化的风。

我们的工作提出了一种新颖的变换，可以加快水面波的计算速度。与其离散化网格上每个点的波高和动量（如先前的有限差分方法），或离散化作为频率和方向的函数的波幅（如先前的基于傅立叶的方法），我们引入小波变换离散化波振幅作为全部空间，频率和方向的组合。与原始水波高度函数相比，这种离散化导致的变量在空间上的变化要慢得多，因此我们可以用更少的变量表示相同量的信息。新的低频模拟对传统的基于频率的限制（如CFL条件和奈奎斯特限制）也不太敏感，后者将最大空间频率转换为对时间步长和视觉细节的限制。结果，我们的离散化既允许高分辨率波细节（例如基于傅立叶的方法），也可以与具有移动障碍物的局部波相互作用。

我们推导了新的公式，用于传播这些与频率相关的局部振幅在空间中的传播；这些方程式导致简单的2D对流和扩散运算，可以在图形硬件上轻松并行化，而为我们提供交互式帧频。我们还提供了对模拟器的基本扩展，例如预先计算的波路径和双向固体流体耦合。最后，我们发现此新表示形式为手动调整复杂海洋模拟的运动提供了便利的艺术界面，并且我们展示了用于初始化模拟或通过脚本化运动覆盖物理的原型波浪绘制界面。

本文的贡献是：

* **欧拉小波变换**：基于慢调制波理论的水波传输新理论模型。
* **低频模拟变量**：我们的离散化依赖于函数，这些函数在空间上的变化比水面高度更慢，因此我们可以在较低分辨率的网格上表示它们。变量的这种变化允许更有效的计算和更大的计算域（图1）。
* **新颖的艺术控制**：除了使用运动的物理公式振幅函数外，我们还尝试重写波振幅以达到艺术效果。我们展示了如何使用我们的方法比以前的工作更快，更轻松地对海浪场景进行预先计算，并且提供了用于设计空间变化海浪的交互式绘画界面。

2 相关工作

计算机动画的早期[Schachter 1980]以来，还原地表水几何形状和运动的主要策略就是近似求解Navier-Stokes方程。 有许多近似这些方程的方法，并且本次讨论将这些技术分为“基于频谱”的分析方法，部分微分方程的直接数值模拟和混合方法。 我们通过讨论艺术指导波浪模拟的方法来结束本节。

基于频谱的方法

理学和计算机图形学方面的工作都对Navier-Stokes方程采用了许多理论假设，以降低复杂度并使其易于分析。 计算机图形学中的一些常见假设是深水，潜在流量，小振幅和周期性边界条件。 这些方法利用了二维高度场上的Navier-Stokes方程的解析解，以便以正弦和余弦形式表达海洋运动，同时牺牲了模拟任意流体运动的能力[Hinsinger等人2002； Horvath 2015； Mastin等人1987； Tessendorf 2004b]。 Jeschke＆Wojtan [2015]模拟波前在整个静态环境中的传播，以扩展基于频谱的方法来处理复杂边界。但是，该方法仅限于预计算，并且不允许与移动障碍物进行交互。

我们称这种离散化傅立叶变换的技术为“基于频谱”的方法。从理论上讲，这些方法可以显示任意数量的高频波，而又不影响该方法的准确性或稳定性，因此它们在理论上显示出无限的视觉细节。类似地，由于运动与时间步长无关，因此要模拟快速的波速也很容易。但是，由于这些方法的推导对基础流体进行了一些假设，因此它们倾向于具有局限性，例如无法与复杂边界进行实际交互。

偏微分方程的数值解

决基于频谱方法的局限性的一种好方法是使用数值算法直接模拟Navier-Stokes方程的二维形式。一些方法离散化了简化的波动方程[Kass and Miller 1990; Thuerey等人2010;Yang等人2016]或薄板方程[Yu等人2012]；这些简化的方程式更易于实现，但最终的行为与实际的水浪根本不同。Tessendorf [2004a;2014]离散化线性化Bernoulli方程的，表现出更逼真的波分散性，但仍缺乏物理上正确的运动（如[Canabal等人2016]所述）。一些研究人员还介绍了基于Boltzmann方法（LBM）的直接数值模拟器[Geist等人2010]，这需要仔细调整LBM碰撞矩阵以产生逼真的波速。基于卷积的方法[Loviscach 2002; Ottosson 2011]的目的是实现正确的色散关系，但它们必须应对占据整个模拟域的大内核的实际困难。最近，Canabal等人[2016]通过金字塔颤振和阴影卷积运算的组合克服了这些困难。

这些方法中的每种方法都比基于频谱的方法更灵活，因为它们对环境的假设最少。例如，基于频谱的方法在模拟障碍物相互作用方面存在困难，因为它们的推导采用周期性边界，而直接模拟方法没有这种限制。另一方面，这些方法必须通过迭代局部内核操作来模拟波传播简单地将时间参数插入余弦函数中。所有这些方法都直接在欧拉网格或网格上离散波的高度和动量，结果，网格的分辨率直接与波中可见细节的数量有关。奈奎斯特（Nyquist）定理要求，网格必须足够精细才能解析出Heightfeld中的最高频率。否则可能发生混叠和不稳定。同样，通过CFL条件，显式集成波模拟的稳定性也与网格间距密切相关。可以通过隐式集成来克服此稳定性问题，但要付出额外的计算和更复杂，对GPU不友好的实现。

用于流体模拟的全三维技术不在本研究范围之内。 我们建议感兴趣的读者参考Bridson [2015]的文字。

混合方法

我们的方法将数值方法的灵活性与基于频谱的方法的稳定性和视觉细节结合在一起，但是我们并不是第一次这样做。Yuksel等人[2007]提出了代表局部波峰并以预定波速c移动的波粒。如果我们使用许多不同的粒径并将c设置为等于分析相速度，则可以将该方法视为基于局部光谱的方法。对此，Jeschke＆Wojtan [2017]引入了以理论群速度传播的波包，其中包含一小束以理论相速度传播的波。这些方法继承了基于频谱的方法的一些优点，例如数值稳定性和理论上准确的波速。同时，它们通过将全局余弦波分解为一系列较短的波分量来自由地与障碍物相互作用，从而避免了基于频谱的波的复杂性。我们的方法具有类似的优点，但它是欧拉而不是拉格朗日（其自由度与空间区域有关，而不是与波运动本身有关）。因此，我们的方法更容易映射到GPU硬件，计算复杂度是恒定的，因为它不会随粒子数量的变化而变化，并且它与纹理图的交互作用很小，以便于艺术控制。

艺术导向波

以前的工作已经通过直接编辑关键帧来研究液体控制[McNamara等人 2004; Shi and Yu 2005]，以交互方式雕刻流体[Manteaux等人2016; Pan等人2013年]，通过在粒子上引入导向力[Thuerey等人2009]或网格[Raveendran等人2012]，通过组合方便的流动原语[Chenney 2004]，或通过在模拟和现有运动之间进行插值[Raveendran等人2014; Thuerey，2016]。一些作品通过在表面上附加波浪来增强现有的动画效果[Angst等人2008年； Kim等人2013]或接近边界[Jeschke and Wojtan 2015，2017]。Horvath等人[Horvath 2015]非常详细地探讨了海洋光谱的控制，Nielsen等人[2013]研究了如何基于脚本化的高度场指导基于频谱的方法。正如我们所提议的，我们没有意识到任何先前的方法可以局部定向方向水波的幅度。

3 理论

我们将在第3.1节中说明基于小波的新水波离散化的动机。然后，我们在3.2节中推导了描述这些水波演化的偏微分方程。最后，我们讨论了推导的有效性，并在3.3节中提供了对该方法的一些解释。

3.1 动机

当前用于水波模拟的数值方法要么依赖于偏微分方程（PDE）的离散化，要么依赖于基于频谱的方法。基于离散PDE的方法近似一些描述波高随时间的变化的微分方程：

其中的等式右侧由特定的波浪模型（浅水方程式，伯努利方程式等）定义，并且环境相互作用在PDE的边界条件中进行编码。这些离散化在网格间距等于的空间上对进行采样。为了避免走样并忠实地再现高频细节，Nyquist-Shannon采样定理[Shannon 1949]要求小于中最短波长的一半。如果包含关注的高频细节，则的采样必须非常接近，因此必须非常小。实际上，降低会需要更多的样本或较小的模拟域，因此Nyquist定理有效地限制了模拟器可以产生的视觉细节。通过降低可以获得高度详细的视觉效果，但会大大增加计算时间和内存。

基于频谱的水浪模拟方法[Tessendorf 2004b]通过完全避免空间离散化消除了这些问题。他们依靠线性波理论[Johnson 1997]，使用频率而不是偏导数来描述波高动力学：

这里，是一个在二维空间和时间上变化的复函数，我们可以从实数部分获取波浪的高度. 波向量是一个二维频率函数，波数表示标量频率，并且表示波浪的方向. 该公式中的指数项代表运动的波，表示振幅。角频率

基于波数，重力和表面张力对每个波的速度进行编码。基于频谱的方法通过离散所有这些二维波的积分而不是离散差分方程来计算波高。该解决方案非常适合具有周期性域，无边界或无障碍物的理想情况。但是，这些基于频谱的方法在不太受约束的情况下变得不切实际或不可能。

综上所述，基于PDE的水波动画方法在模拟具有复杂环境相互作用的低频波函数方面表现出色，而基于频谱的方法则是模拟经历简单运动而没有任何边界相互作用的高度详细的波函数的理想选择。在以下部分中，我们将得出一种混合离散化方法，该方法依赖于离散化的PDE来模拟低频运动，并使用基于频谱的技术来模拟高频。这种策略使我们能够模拟比与复杂环境相互作用的短得多的波长，同时消除了前面提到的与模拟高度详细的波相关的问题。

我们的推导依赖于Gabor小波变换，该变换有效地将方程2（振幅仅取决于，并且独立于和）转换为相似的振幅取决于,和:

与相比，这种新的空间变化幅度不仅允许对模拟进行更多的局部控制，而且我们证明了被保证具有比波高函数拥有更低的频率内容。我们将利用这一事实来预防与奈奎斯特极限有关的问题，并创建高效而详细的波浪模拟。

3.2 推导

波高的Gabor变换为

其中积分体中的第一个指数项是一个以位置为中心，具有标准偏差s的高斯分布，而第二个指数项是具有波向量的静态波。我们可以将等式5视为和高斯小波之间的内积，因此表示水高在点附近表现得像具有波向量的波的接近程度。

我们可以逆变换Gabor:

我们引入变量变换来获取动力波求解在公式2的对比：

现在扮演着振幅在空间和时间上变化的角色. 把公式2带入公式5，我们得到

尽管该方程式完全规定了的演化，但其积分形式使其很难施加边界条件，并且通常难以进行离散化。相反，我们更喜欢使用微分方程，它是通过采用方程8的时间导数并根据其空间导数来表示的。将色散关系线性化，可以得到演化的第一阶偏微分方程：

这说明我们的振幅函数在空间上沿着方向以速度平移。注意，该速度恰好对应于传输水波能量[Johnson 1997]和波包[Jeschke and Wojtan 2017]的群速度。我们在附录A中提供了对该等式的更详细推导。

公式10受边界条件的约束：

在过渡边界上

在反射边界上 (11)

其中是定义在定义域之外的振幅函数,是反射离开法向量为n的边界的波向量。反射边界条件基于平面波如何反射直线边界.

公式7和10是我们模拟水浪所需的关键要素。实际的交互式波模拟器使用公式10在每个时间步对进行步进，然后渲染器使用公式7在需要的地方重建水面。在该方法中，用作主要的模拟变量，而之后将用于重建和可视化。（更新，然后在需要时通过将作为许多不同的波的振幅加在一起来计算。）

我们注意到，公式5中的Gabor变换仅用于推导，无需计算。同样，高斯s的大小也不会出现在方程式7和10中，因此它只是一种理论结构，可用于分析，而实际上并不是我们数值方法中的参数。我们将在第4节中说明如何离散方程式7和10。

3.3 讨论

近似精度。 公式10是真实演化的线性近似，仅当接近时才有效。值得庆幸的是，每当远离时，公式9中的高斯项就会迫使变小，因此，由这种近似引起的误差就成倍地减小了。

此外，反射边界条件是基于几何光学的，并且仅当波长和水包大小（由参数s表示）与边界曲率相比较小时才有效。要更精确地处理高曲率边界，就需要考虑到波散射效应，我们将在以后的工作中予以保留，并注意，我们简单的反射边界条件对于视觉上的合理性是足够的。

低频。我们在附录B中证明的傅立叶变换本质上是的傅立叶变换的低通滤波形式。换句话说，我们可以仅使用低频变量来重建波高函数。这种频率偏移在方法的最终离散化中具有重要的意义，因为奈奎斯特极限阻止我们在不会发生走样的情况下直接将高频函数离散化，而即使在较粗的网格分辨率下，也可以将离散化。我们的算法不是将网格分辨率强加于可见水波的分辨率，而是将其强加于波幅的分辨率，这不能直接可视化，并且可以说更难于在视觉上进行区分。

相移(Phase Shift)。Gabor变换使我们可以根据相位和局部振幅来讨论水位。公式7中每个小波的相位由决定。如果我们通过用替换在空间上转换整个函数，则在等式的右侧获得的相移；如果比较大，空间的小偏移会导致大的相移。因此，尽管振幅在粗网格上也表现良好，但相位仍然对奈奎斯特极限敏感，并且需要低频波（小）或非常多的样本才能进行精确重构。或者，如果我们不需要特定的干扰模式，则可以通过向每个波添加随机的初始相移来避免走样[Cook 1986]：

其中是每个波方向的随机数，在整个时间内都是固定的。

混合模拟。3.1节激发了我们的方法作为基于频谱和基于PDE的混合。如果我们在模拟变量上检查高斯大小s的影响，则这种混合性质变得更加明确：

当接近无穷大且高斯变为空间常数时，我们的方法过渡到传统的基于频谱的算法。另一方面，当变为零且高斯变为Dirac delta函数时，我们的方法将计算类似于水高的函数。我们从未在离散化过程中直接设置，但它基本上由网格间距决定。因此，我们的方法类似于单个网格单元中基于频谱的算法，并且随着我们进行缩小，类似于基于PDE的离散化。

与波包的关系。尽管我们在第3.2节中使用了Gabor变换来推导我们的方法，但是我们也可以从Jeschke＆Wojtan [2017]的水波包中推导该方法，就像我们在附录C中所做的那样。我们证明了方程7的出现是无限数量的波包的极限行为，跨越所有可能的位置和波矢。 从这个角度来看，Jeschke＆Wojtan [2017]引入了我们连续谱理论的一种特殊的拉格朗日离散化，对少量单个数据包进行采样并跟踪它们在空间中的传播。等式10表示另一种欧拉参考系，其跟踪空间中每个点处波包含量的变化。我们还注意到，在附录C中，函数表现为所有附近波包幅度的平滑平均值。这为我们提供了进一步的证据，证明确实是一个平滑函数，它随空间缓慢变化。

4 离散化

3.2节介绍了一个新的振幅函数，一个随时间变化的方程（方程10）和计算水波高度的方程（方程7）。本节的其余部分说明我们如何离散化这些想法以有效地模拟水浪。

振幅）是4 +1维的函数：空间占二维，波向量占二维，时间占一维。我们发现用极坐标 表示波向量是直观且计算方便的，其中是的大小，是与x轴的夹角。我们用四维网格表示，该网格跨越两个空间坐标和，角坐标和波向量坐标.我们将的样本存储在此4D网格中的每个节点上，并由坐标索引。我们使用符号表示波在网格节点位置处的离散振幅样本，该波的振幅样本以角度,波数行进。图2说明了用于离散化的网格。

现在，我们可以按照有限元方法的样式通过基函数的线性组合来近似：

其中是位置基函数，是角度的基函数，是波数坐标的基函数，最后是系数函数用于权重的变化值。例如所有维度的分段线性基函数会使得，则

其中基本函数只是hat函数使其达到最接近值。

对基函数的唯一实际限制是，如果我们希望像半拉格朗日平流这样的运算能按预期工作，则我们的重构函数应实际对离散样本进行插值；换句话说，。空间基函数只是在空间上插值，在这里我们使用标准的分段线性或分段三次基函数。角权重插值不同行进方向上的振幅，在此我们也使用分段三次基函数。

波数基础具有特殊的物理解释；它象征着振幅代表的波的频谱。如果继续我们的波包类比，则描述沿方向行进，波数为的波包在位置处的频率空间形状。因此，分段常数表示波包具有平坦的频谱，所有与相似的波数具有完全相同的振幅； 分段线性使波包在其峰值在处具有更多局部波包状形状；高斯类似于典型的波包推导。我们可以自由地为该函数分配任何希望的频谱，并且由于我们在本文中对水波进行了建模，因此发现将实际的海浪频谱用于是合适的。我们的示例将设置为等于[Horvath 2015]的等式32中的方向谱，并对其进行归一化使得。

在实践中，我们惊讶的发现可以使用粗网格进行离散化。我们的模拟使用个样本用于波向量角度；精细的离散化并没有提高模拟质量。我们使用更少的样本来离散化波数。通常只需要个样本即可获得所需的效果，尽管我们在第8节中对多达个样本进行了实验。如上所述，在空间上变化缓慢，因此也不需要太大的空间分辨率。在我们的实现中，我们为每个空间维度分配 = 4096个网格单元，这定义了大约一米的网格单元间距。

最后，本文的模拟使用实值函数作为初始条件。然后，根据等式10，此函数将一直保持不变，因此我们的实现无需麻烦地存储复杂的系数。

4.2 离散步进 2019年11月20日19点36分

一旦我们将所有波向量离散化，公式10便成为空间中少量的独立标量步进公式-每个对应一个样本. 我们使用Fedkiw等人提出的无边坡稳定的半拉格朗日对流与边坡限制三次空间插值，对每个方程并行地进行数值积分. [Fedkiw等人2001]：

其中是离散在固定角和波数的差值, 其中是由决定的波方向, .

当半拉格朗日射线离开模拟域时，我们通过使用等式17右侧的不同值，应用等式11中的相关边界条件.对于过渡边界，我们使用一个程序生成的环境函数来描述环境海洋行为. 对于反射边界，我们反射半拉格朗日射线或边界以得到新的位置和新的方向，并用反射函数值更新.

振幅速度 具有不同角度或波数的振幅具有不同的行进方向或速度. 随着时间的流逝，这些振幅会彼此分离，一个好的初始状态会变成一束分离的振幅斑点，如图3左侧所示.这是用多个有限波向量离散化公式10并通过增加两个扩散项来解决该问题:

其中控制传播方向的扩散（模拟波包由于色散而伸展），而控制传播角度的扩散（模拟波包从源辐射出来时切向扩展）.其他有扩散项也可以加进来，但是我们发现上述两项确实很有用. 图3说明了我们的角度扩散项的效果.

我们应用算子分裂来数值求解该对流扩散方程：如上所述，对流通过半拉格朗日对流求解，并且该扩散通过空间二阶有限差分和时间向前欧拉离散化. 在我们的示例中，我们设置与对流速度，空间分辨率，波数分辨率和角分辨率相关的扩散参数：和.